Seminario EAC

Luigi Caputi

4 marzo 2014

Sommario

Scopo del seminario è partire dalle nozioni di superficie di Riemann e dimostrare il classico Teorema di Riemann Roch.

1 Richiami

Cominciamo con qualche utile richiamo sulle superfici di Riemann:

Definizione 1. Una *Superficie di Riemann* è una coppia (X, Σ), dove X è una 2-varietà connessa e Σ è una struttura complessa su X.

Definizione 2. Sia X una superficie di Riemann e $Y \subseteq X$ un aperto; $f: Y \to \mathbb{C}$ è detta *olomorfa* se, per ogni carta (U, ψ) di X la funzione $f \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap Y) \to \mathbb{C}$ è olomorfa (come mappa tra aperti di $\mathbb{C}$). Denotiamo l'insieme di tutte le mappe olomorfe su Y con $\mathcal{O}(Y)$.

Definizione 3. Siano X e Y due superfici di Riemann. Una mappa continua $f: X \to Y$ è detta *olomorfa* se, per ogni coppia di carte (U_1, ψ_1), (U_2, ψ_2), rispettivamente in X e Y, con $f(U_1) \subseteq U_2$, la mappa $\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}$ è olomorfa.

Teorema 4 (di identità)**.** *Siano X e Y superfici di Riemann, f_1, f_2 funzioni olomorfe da X in Y che coincidono su $A \subseteq X$ sottoinsieme avente punto limite $a \in X$. Allora $f_1 = f_2$.*

Dimostrazione. Sia G l'insieme dei punti di $x \in X$ aventi un intorno W su cui f_1 ef f_2 coincidono. Per definizione G è aperto. Sia b un punto di bordo per G; per continuità di f_1 ed f_2, si ha anche $f_1(b) = f_2(b)$. Scegliamo due carte $\varphi: U \to V$ e $\psi: U' \to V'$ rispettivamente in b e $f_i(b)$, con $f_i(U) \subseteq U'$ e s.p.g. U connesso. Allora le scritture locali $g_i = \psi \circ f_i \circ \varphi^{-1}$ sono olomorfe; poiché $G \cap U$ è non vuoto, il teorema di identità per le funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ implica che $g_1 = g_2$, ovvero $f_1|_U = f_2|_U$. Quindi $b \in G$. Infine G è non vuoto in quanto $a \in G$ (usando ancora il principio di identità sui domini di $\mathbb{C}$). □

Definizione 5. Sia X una superficie di Riemann e Y un suo aperto. Una funzione *meromorfa* su Y è una funzione olomorfa $f: Y' \to \mathbb{C}$, definita su un aperto $Y' \subseteq Y$, tale che:

- $Y - Y'$ contiene solo punti isolati;
- per ogni $p \in Y - Y'$ si ha $\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty$.

I punti in $Y - Y'$ si chiameranno *poli* e l'insieme delle funzioni meromorfe su Y si indicherà con $\mathcal{M}(Y)$.

Come nel caso di aperti di $\mathbb{C}$, chiediamo che una funzione meromorfa non abbia singolarità essenziali, né poli che si accumulano. Dalla definizione data segue inoltre che, localmente, pensiamo ancora le funzioni meromorfe come un rapporto di funzioni olomorfe, con denominatore non identicamente nullo su nessuna componente connessa del dominio. Con il linguaggio delle superfici di Riemann, possiamo ancora pensare le funzioni meromorfe come funzioni olomorfe a valori in $\mathbb{P}^1$:

Teorema 6. *Sia X una superficie di Riemann e $f \in \mathcal{M}(X)$. Per ogni polo p di f indichiamo per semplicità $f(p) = \infty$. Allora $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ è una mappa olomorfa.*

Viceversa, se $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ è olomorfa, allora f è identicamente ∞ oppure $f^{-1}(\infty)$ consiste di soli punti isolati, e $f\colon X' \to \mathbb{C}$ è una funzione meromorfa su X, dove $X' = X - f^{-1}(\infty)$.

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{M}(X)$ una funzione meromorfa e P l'insieme dei poli di f. Poiché esiste (infinito) il limite in ogni punto di P, f induce una mappa continua $f\colon X \to \mathbb{P}^1$. Siano $\varphi\colon U \to V$, $\psi\colon U' \to V'$ due carte con $f(U) \subseteq U'$; la mappa $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon V \to V'$ è per ipotesi olomorfa su $V - \varphi(P)$, e per il teorema di Riemann si estende ad una olomorfa su tutto V. Dunque f stessa era olomorfa.

Viceversa, se $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ è olomorfa e non identicamente ∞, per il teorema di identità $f^{-1}(\infty)$ deve essere discreto. $\square$

Osservazione 7. Il Teorema di identità e il Teorema precedente implicano che anche le funzioni meromorfe soddisfano il Teorema di Identità. Dunque ogni $f \in \mathcal{M}(X)$ che non è identicamente nulla ha solo zeri isolati, ovvero $\mathcal{M}(X)$ è un campo.

Molti teoremi dimostrati per mappe olomorfe su $\mathbb{C}$ valgono anche per superfici di Riemann, li rienunciamo quindi per completezza:

Teorema 8 (Comportamento locale delle mappe olomorfe)**.** *Siano X e Y superfici di Riemann, $f\colon X \to Y$ olomorfa non costante. Sia $a \in X$ e $b := f(a)$; allora esistono un intero $k \geq 1$, carte $\varphi\colon U \to V$ su X, $\psi\colon U' \to V'$ su Y tali che:*

- *$a \in U$, $\varphi(a) = 0$, $b \in U'$, $\varphi(b) = 0$;*
- *$f(U) \subseteq U'$;*
- *la mappa $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon V \to V'$ è data da $F(z) = z^k$ per ogni $z \in V$.*

Il teorema ha un enunciato locale, dunque la tesi è vera in quanto il risultato vale per mappe olomorfe di $\mathbb{C}$ in sé; tuttavia il teorema è molto importante in quanto ci permette di caratterizzare il numero k di sopra, nel modo seguente: per ogni U_0 intorno aperto di a esistono intorni $U \subseteq U_0$ di a e W di $b = f(a)$ tali che l'insieme $f^{-1}(y) \cap U$ contiene esattamente k elementi per ogni $y \in W$, con $y \neq b$. Chiamiamo k la *molteplicità* di f in a.

Corollario 9. *Siano X e Y superfici di Riemann ed $f\colon X \to Y$ olomorfa; valgono:*

- *Se f è non costante, allora è aperta (infatti la mappa $z \to z^k$ è aperta).*
- *Se f è iniettiva, allora è un biolomorfismo su $f(X)$.*
- *Se f è non costante e X è compatto, allora anche Y è compatta e f è surgettiva (infatti $f(X)$ è aperto e chiuso non vuoto).*

Corollario 10. *Ogni funzione olomorfa su una superficie di Riemann compatta è costante.*

Corollario 11 (Teorema di Liouville)**.** *Ogni funzione olomorfa limitata $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è costante.*

Infatti f si prolunga, per il Teorema di estensione di Riemann, ad una mappa olomorfa $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}$, e dunque è costante.

2 Rivestimenti ramificati

Una proprietà molto importante delle superfici di Riemann è che mappe olomorfe non costanti tra superfici di Riemann sono mappe di rivestimento, possibilmente con singolarità. Vediamo più in dettaglio questo aspetto, che ci permetterà di dimostrare che una funzione meromorfa non costante definita su una superficie di Riemann compatta ha lo stesso numero di zeri e di poli.

Osservazione 12. Sia $p\colon X \to Y$ una mappa olomorfa non costante tra superfici di Riemann. Allora p è aperta e discreta, ovvero la fibra di un punto $y \in Y$ è un sottospazio discreto di X. Infatti abbiamo già visto nel Corollario 9 che p è aperta; se $p^{-1}(y)$ non fosse discreta, allora dal Teorema di Identità f sarebbe costantemente y, contro le ipotesi.

Definizione 13. Siano X, Y superfici di Riemann e $p\colon X \to Y$ olomorfa. Un punto $x \in X$ è detto *punto di ramificazione per* p se non esiste alcun intorno U di x tale che $p|_U$ sia iniettiva.

Teorema 14. *Siano X e Y superfici di Riemann. Una mappa $p\colon Y \to X$ olomorfa non costante è priva di punti di ramificazione se e solo se p è un omeomorfismo locale.*

Dimostrazione. Supponiamo che p non abbia punti di ramificazione, e sia $y \in Y$. Esiste allora un intorno V di y su cui p è iniettiva; dunque $p|_V$ è continua, iniettiva, aperta e surgettiva sull'immagine, ovvero un omeomorfismo.

Viceversa, se p è un omeomorfismo locale, è in particolare iniettiva in un intorno di ciascun punto di Y. $\square$

Un esempio è dato dalla mappa $p_k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, data da $p_k(z) = z^k$, con $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Infatti, in tal caso, 0 è un punto di ramificazione di molteplicità k.

Ricordiamo ora che uno spazio topologico localmente compatto è uno spazio di Hausdorff in cui ogni punto ha un intorno compatto. Una mappa continua $f\colon X \to Y$ tra spazi localmente compatti è propria se la controimmagine di ogni compatto è compatta. Osserviamo inoltre che ogni mappa propria è chiusa, in quanto, in uno spazio localmente compatto, un sottoinsieme è chiuso se e solo se la sua intersezione con ogni compatto è compatta. [Sia F il sottoinsieme in questione, e p un punto non appartenente ad esso. Sia K l'intorno compatto di p. Per ipotesi $K \cap F$ è ancora compatto, e per ipotesi di T2, per ogni $q \in F \cap K$ esistono U_q, V_q intorni disgiunti di q e p. Gli U_q formano così un ricoprimento aperto, da cui estraiamo un sottoricoprimento finito. L'intersezione dei relativi V_{q_i} è allora ancora un aperto disgiunto da F.]

Lemma 15. *Siano X, Y spazi topologici localmente compatti e $p\colon Y \to X$ una mappa propria e discreta. Allora:*

- *per ogni $x \in X$ la fibra $p^{-1}(x)$ è finita;*
- *se $x \in X$ e V è un intorno di $p^{-1}(x)$, allora esiste un intorno U di x tale che $p^{-1}(U) \subseteq V$.*

Dimostrazione. Basta osservare che $p^{-1}(x)$ è un compatto discreto di Y e che V sia aperto; così $p(Y \setminus V) = A$ è un chiuso non contenente x e $U := X \setminus A$ è l'intorno cercato. $\square$

Teorema 16. *Siano X e Y spazi localmente compatti e $p\colon Y \to X$ un omeomorfismo locale proprio. Allora p è un rivestimento.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e chiamiamo $y_1, \ldots, y_n$ gli elementi (distinti) della fibra di x, finiti perché p è un omeomorfismo locale, e dunque la fibra è un compatto discreto. Per ogni $j = 1, \ldots, n$ esistono intorni aperti W_j di y_j e U_j di x tali che $p|_{W_j}\colon W_j \to U_j$ sia un omeomorfismo. Possiamo supporre inoltre, senza perdita di generalità, che i W_j siano a due a due disgiunti. L'unione W

dei W_j è un intorno aperto di $p^{-1}(x)$; dunque per il Lemma precedente, esiste un intorno aperto U di x, contenuto nell'intersezione degli U_j, tale che $p^{-1}(U) \subseteq W$. Ponendo $V_j = W_j \cap p^{-1}(U)$, otteniamo che i V_j sono aperti disgiunti con $p^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^n V_j$, e che tutte le mappe $p|_{V_j} : V_j \to U$ sono omeomorsfimi. □

Continuando il ragionamento con l'ipotesi che X e Y siano superfici di Riemann, consideriamo una mappa $f : X \to Y$ olomorfa propria non costante. Allora, per il Teorema 8 l'insieme A dei punti di ramificazione per f è un chiuso discreto in X (infatti che sia discreto dicende direttamente; che sia chiuso osserviamo che ogni punto non nullo, nella scrittura in coordinate, non è di ramificazione. Dunque ogni punto x ammette un intorno U tale che $U \setminus \{x\}$ non ha punti di ramificazione, ovvero l'insieme dei punti di ramificazione è un chiuso). Poiché f è propria, $B = f(A)$ è chiusa (e discreta). Chiamiamo B *insieme dei punti critici per* f.

Sia $Y' := Y \setminus B$ e $X' := X \setminus p^{-1}(B)$. Allora $f|_{X'} : X' \to Y'$ è una mappa olomorfa propria non costante senza punti di ramificazione, dunque un omeomorfismo locale, e per il teorema precedente, un rivestimento. Dal Lemma precedente, tale rivestimento ha un numero finito di fogli, diciamo n.

Per estendere tale risultato abbiamo ora bisogno di contare anche le molteplicità. Per $x \in X$, denotiamo con $v(f, x)$ la molteplicità (di cui si è già discusso in merito al Teorema 8) di f in x. Diremo allora che f prende il valore $y \in Y$, con molteplicità, m volte, se

$$m = \sum_{x \in f^{-1}(c)} v(f, x).$$

Teorema 17. *Siano X, Y superfici di Riemann e $f : X \to Y$ una funzione olomorfa non costante propria. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $y \in Y$, f prende il valore y esattamente n volte, contate con molteplicità.*

Dimostrazione. Sia n il numero di fogli del rivestimento $f|_{X'} : X' \to Y'$. Sia $b \in B$ un valore critico per f e diciamo $f^{-1}(b) = \{x_1, \ldots, x_r\}$, con $k_j = v(f, x_j)$. Per il Teorema 8 esistono degli intorni disgiunti U_j di x_j e V_j di b tali che, per ogni $c \in V_j \setminus \{b\}$, l'insieme $U_j \cap f^{-1}(c)$ consiste di esattamente k_j punti.

Per il Lemma precedente, possiamo trovare un intorno $V \subseteq V_1 \cap \cdots \cap V_r$ di b tale che $f^{-1}(V) \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_r$. Allora per ogni $c \in V \cap Y'$ abbiamo che $f^{-1}(c)$ consiste esattamente di $k_1 + \cdots + k_r$ punti. D'altra parte, tale numero deve essere pari ad n perché il rivestimento è ad n fogli e $c \in Y'$, dunque $n = k_1 + \cdots + k_r$. □

Corollario 18. *Ogni funzione meromorfa non costante f definita su una superficie di Riemann compatta X ha lo stesso numero di zeri e di poli, tutti contati con molteplicità.*

Dimostrazione. La funzione meromorfa f si può vedere come funzione olomorfa non costante $f : X \to \mathbb{P}^1$, dunque propria. □

3 Calcolo differenziale su superfici di Riemann

Sia U un aperto di $\mathbb{C}$, e identifichiamo quest'ultimo con $\mathbb{R}^2$ ponendo $z = x + iy$; possiamo così considerare le funzioni su U che siano differenziabili (reali).

Chiamiamo $\mathcal{E}(U)$ la $\mathbb{C}$-algebra generata da tutte le funzioni $f : U \to \mathbb{C}$ differenziabili rispetto alle coordinate reali. Poniamo inoltre

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Le equazioni di Cauchy-Riemann ci dicono che lo spazio $\mathcal{O}(U)$ delle funzioni olomorfe su U è il nucleo della mappa $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \colon \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U)$.

Osservazione 19. Utilizzando carte locali è possibile dare le stesse definizioni anche per una superficie di Riemann X. Per ogni aperto $Y \subseteq X$, chiamiamo quindi $\mathcal{E}(Y)$ l'insieme di tutte le funzioni $f \colon Y \to \mathbb{C}$ tali che, per ogni carta locale $z \colon Y \supseteq U \to V \subseteq \mathbb{C}$, si abbia $f \circ z^{-1} \in \mathcal{E}(V)$.

Se inoltre (U, z) è un intorno di carta su X, con $z = x + iy$, allora useremo, come di consueto, le notazioni $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \colon \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U)$ per gli operatori differenziali indotti dalla carta locale.

Usando ancora la struttura differenziabile indotta dalla struttura complessa, possiamo considerare lo spazio tangente reale ad X. Se (U, z) è una carta in a, con $z = x + iy$, tale spazio tangente è generato da $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$, o, equivalentemente, da $\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\}$. Analogamente, il cotangente è generato dai differenziali $\{dx, dy\}$ o equivalentemente dai differenziali $\{dz, d\bar{z}\}$; se f è una funzione differenziabile in un intorno di a si ha dunque:

$$\begin{aligned} df_a &= \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx_a + \frac{\partial f}{\partial y}(a) dy_a \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(a) dz_a + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d\bar{z}_a \end{aligned}$$

Definizione 20. Chiamiamo $T_a^{1,0}$ il $\mathbb{C}$-spazio generato da dz_a, e $T_a^{0,1}$ quello generato da $d\bar{z}_a$.

Per costruzione il cotangente ad X in a è dunque dato dalla somma diretta di $T_a^{1,0}$ e $T_a^{0,1}$; i vettori cotangenti in $T_a^{1,0}$ saranno detti di tipo $(1, 0)$, gli altri di tipo $(0, 1)$.

Definizione 21. Se f è differenziabile in un intorno di a, definiamo $d'f_a$ e $d''f_a$ come:

$$df_a = d'f_a + d''f_a, \quad d'f_a \in T_a^{1,0}, \quad d''f_a \in T_a^{0,1}$$

ovvero

$$d'f_a = \frac{\partial f}{\partial z}(a) dz_a, \quad d''f_a = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d\bar{z}_a.$$

Definizione 22. Sia $Y \subseteq X$ un aperto; una 1-*forma differenziale* su Y è una sezione ω del fibrato cotangente ad Y. Se, per ogni $a \in Y$, si ha $\omega(a) \in T_a^{1,0}$ (rispettivamente $T_a^{0,1}$) diremo che ω è una forma di tipo $(1, 0)$ (rispettivamente $(0, 1)$).

Ad esempio, il differenziale di $f \in \mathcal{E}(Y)$ è una 1-forma; inoltre, f è olomorfa in a precisamente se $d''f_a = 0$.

Osserviamo inoltre che se (U, z) è una carta, con $z = x + iy$, allora ogni 1-forma ω si può scrivere su U come $\omega = f dx + g dy$, o, equivalentemente, come $\omega = \varphi dz + \psi d\bar{z}$.

Definizione 23. Diciamo che la forma ω su Y è *differenziabile* se, rispetto ad ogni carta (U, z), può essere scritta come $\omega = f dz + g d\bar{z}$, con $f, g \in \mathcal{E}(U \cap Y)$.

Diciamo che è *olomorfa* se si scrive come $\omega = f dz$ con $f \in \mathcal{O}(U \cap Y)$.

Sia X una superficie di Riemann ed U un suo aperto. Denotiamo con $\mathcal{E}^{(1)}(U)$ lo spazio vettoriale costituito dalle forme differenziabili su U, con $\mathcal{E}^{1,0}(U)$ (rispettivamente $\mathcal{E}^{0,1}(U)$) lo spazio delle forme differenziabili di tipo $(1, 0)$ (rispettivamente di tipo $(0, 1)$), infine con $\Omega(U)$ lo spazio vettoriale costituito dalle forme olomorfe.

Procediamo ora con la definizione delle forme meromorfe; osserviamo prima che se ω è una forma olomorfa su $Y \setminus \{a\}$, allora localmente la possiamo scrivere come $\omega = f dz$, con $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$, e possiamo dire che ω ha una singolarità di tipo polo o essenziale, se la funzione f ha in a una singolarità di tipo polo o essenziale. Abbiamo allora la seguente:

Definizione 24. Una 1-forma ω definita su un aperto Y della superficie di Riemann X è detta meromorfa se esiste un aperto $Y' \subseteq Y$ tale che:

1. ω è una forma olomorfa su Y';

2. $Y \setminus Y'$ consiste di soli punti isolati;

3. ω ha una singolarità di tipo polo per ogni $a \in Y \setminus Y'$.

Denotiamo con $\mathcal{M}^{(1)}(Y)$ l'insieme di tutte le forme meromorfe su Y.

Concludiamo la sezione osservando che, ccome nel caso di varietà reali, possiamo considerare l'algebra esterna di una superficie di Riemann; se (U, z) è una carta locale in a, allora $dx \wedge dy$ ne è una base o, in modo equivalente, lo è $dz \wedge d\bar{z}$. Anche per le 2-forme, diremo che ω è differenziabile se i coefficenti locali sono differenziabili, e indichereremo con $\mathcal{E}^{(2)}(Y)$ lo spazio vettoriale delle 2 forme differenziabili su Y.

Osservazione 25. Possiamo considerare i differenziali prima definiti, d, d', d''. Come nel caso reale, essi sono mappe lineari dallo spazio $\mathcal{E}^{(1)}(U)$ allo spazio $\mathcal{E}^{(2)}(U)$, dove U è un aperto della superficie di Riemann X. Se $\omega = f dg$, con f, g funzioni differenziabili, si ha:

$$d\omega = df \wedge dg, \quad d'\omega = d'f \wedge dg \text{ e } d''\omega = d''f \wedge g.$$

Possiamo notare facilmente che, per $f \in \mathcal{E}(U)$ e $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$, si ha:

1. $d^2 = (d')^2 = (d'')^2 = 0$;

2. $d'd'' + d''d' = 0$;

3. $d\omega = d'\omega + d''\omega$;

4. $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$.

Definizione 26. Una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$ è *chiusa* se $d\omega = 0$, ed *esatta* se esiste $f \in \mathcal{E}(Y)$ tale che $\omega = df$.

4 Fasci e prefasci

Studiamo ora uno strumento molto utile in geometria, quello di *fascio*. Vedremo che molti spazi che abbiamo costruito, quali $\mathcal{E}, \mathcal{E}^{(0,1)}, \mathcal{E}^{(1,0)}, \mathcal{O}$, sono degli esempi di fasci.

Definizione 27. Un *prefascio* $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X a valori in una categoria $\mathcal{C}$ è un funtore controvariante dalla categoria degli aperti di X in $\mathcal{C}$.

In particolare, un prefascio in gruppi abeliani su X è una mappa che associa ad ogni aperto $U \subseteq X$ un gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$, detto gruppo delle *sezioni* di $\mathcal{F}$ su U, e ad ogni inclusione di aperti $\iota \colon V \hookrightarrow U$ un morfismo $\rho^U_V \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, detto morfismo di *restrizione*, in modo che:

i. $\rho^U_U = \mathrm{id}_U$;

ii. $\rho^V_W \circ \rho^U_V = \rho^U_W$ per ogni $W \subseteq V \subseteq U$.

Osserviamo dunque che, con le usuali mappe di restrizione sono prefasci $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{(0,1)}$, $\mathcal{E}^{(1,0)}, \mathcal{E}^{(2)}$, e così via; in realtà essi soddisfano anche la Definizione che segue:

Definizione 28. Un prefascio $\mathcal{F}$ su X è detto *fascio* se:

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = e$ gruppo banale;
2. se $\{U_j\}$ è un ricoprimento aperto di $U \subseteq X$, ed s, t sono sezioni di U tali che $s|_{U_j} = t|_{U_j}$ per ogni j, allora $s = t$;
3. se $\{U_j\}$ è un ricoprimento aperto di $U \subseteq X$, ed $s_j \in \mathcal{F}(U_j)$ sono sezioni tali che $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ per ogni i, j, allora esiste $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{U_j} = s_j$ per ogni j.

In altre parole, un fascio è un prefascio che soddisfi due relazioni di compatibilità: le sezioni sono univocamente determinate dalle restrizioni, e sezioni compatibili si incollano.

Esempio 29. Sia X una superficie di Riemann e $\mathcal{O}(U)$ l'anello delle funzioni olomorfe su $U \subseteq X$ aperto. Considerando la mappa di restrizione $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ per $V \subseteq U$, otteniamo il fascio $\mathcal{O}$ delle funzioni olomorfe su X. Analogamente, si definisce il fascio $\mathcal{M}$ delle funzioni meromorfe su X.

Osservazione 30. Osserviamo che, se avessimo seguito l'esempio di quanto fatto su $\mathbb{C}$ e avessimo definito il prefascio delle funzioni meromorfe come anello dei quozienti delle funzioni olomorfe, non avremmo più ottenuto un fascio. Più precisamente, ad ogni aperto di X associamo l'anello dei quozienti di $\mathcal{O}(U)$ rispetto alle olomorfe non identicamente nulle su alcuna componente connessa di U. Questo è un prefascio, ma non ha la struttura di fascio. Infatti non è detto che una funzione meromorfa globale su X superficie di Riemann si scriva ancora come rapporto di due olomorfe globali.

Esempio 31. Per U aperto di X superficie di Riemann indichiamo con $\mathcal{O}^*(U)$ il gruppo moltiplicativo dato dalle mappe olomorfe $f\colon U \to \mathbb{C}^*$; con le usuali mappe di restrizioni, $\mathcal{O}^*$ diventa un fascio su X. Analogamente si definisce il fascio $\mathcal{M}^*$: per ogni aperto $U \subseteq X$ $\mathcal{M}^*(U)$ consiste delle funzioni meromorfe $f \in \mathcal{M}(U)$ che non si annullano identicamente su nessuna componente connessa di U.

Definizione 32. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci in gruppi abeliani sullo spazio topologico X. Un *omomorfismo di fasci* $\alpha\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è una famiglia di omomorfismi (di gruppi)

$$\alpha_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \quad \forall\, U \subseteq X \text{ aperto}$$

che sia compatibile con le restrizioni, ovvero:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha_V"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

e il diagramma è commutativo. Se ogni α_U è un isomorfismo, anche α sarà detto isomorfismo.

Esempio 33. Se $\mathcal{E}$ è il fascio delle funzioni differenziabili su una superficie di Riemann X, il differenziale esterno induce l'omomorfismo di fasci $\mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}$, così come i differenziali d', d''.

Un altro esempio è dato dal nucleo di un omomorfismo di fasci; se $\alpha\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un omomorfismo di fasci, possiamo definire

$$\mathcal{K}(U) := \operatorname{Ker}(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U));$$

tale famiglia, insieme alle restrizioni indotte da $\mathcal{F}$ è ancora un fascio, denotato con $\mathcal{K} = \operatorname{Ker}(\alpha)$. Possiamo osservare ad esempio, che:

$$\mathcal{O} = \operatorname{Ker}(\mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{0,1}) \quad \Omega = \operatorname{Ker}(\mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{(2)}).$$

Osservazione 34. Dato un omomorfismo di fasci α possiamo definire per ogni aperto U di X anche:

$$\mathcal{L}(U) := \operatorname{Im}(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U));$$

a differenza del nucleo, tuttavia, tale associazione dà luogo, in generale, solo ad un prefascio. Come esempio consideriamo l'omomorfismo di fasci $\exp\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ che, per $f \in \mathcal{O}(U)$, con $U \subseteq \mathbb{C}^*$, è definito da $\exp_U(f) = \exp(2\pi i f) \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)$. Poniamo $U_1 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ e $U_2 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$. Consideriamo ora la funzione $f_k \in \mathcal{O}^*(U_k)$ data da $f_k(z) = z$ per ogni $z \in U_k$.

Poiché gli aperti considerati sono semplicemente connessi, esiste una determinazione del logaritmo in ciascuno di essi, dunque $f_k \in \operatorname{Im}(\mathcal{O}(U_k) \xrightarrow{\exp_{U_k}} \mathcal{O}^*(U_k))$ e, in più, $f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}$ per come sono state definite. Se il prefascio immagine fosse un fascio, dovrebbe allora esistere $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^*)$ tale che $f|_{U_k} = f_k$; ma ciò è impossibile in quanto il logaritmo non ha una determinazione univoca su tutto $\mathbb{C}^*$.

Dunque non tutti i prefasci sono fasci; un altro esempio è il prefascio che associa al vuoto l'identità di $\mathbb{Z}_2$ e ad ogni altro aperto l'intero gruppo; questo è un prefascio che non soddisfa l'assioma di esistenza. Per ovviare a tali differenze, e uniformare nel seguito la trattazione, costruiamo dei fasci a partire da qualsiasi prefascio.

Ricordiamo prima la seguente:

Definizione 35. Un sistema diretto di gruppi è una famiglia $\{G_i\}_{i \in I}$ di gruppi indicizzata su un insieme diretto I, e per ogni coppia di indici $i \leq j$ omomorfismi $f^i_j\colon G_j \to G_i$ tali che:

- $f^i_i = \mathrm{id}_G$;
- $f^i_j \circ f^j_k = f^i_k$ per ogni $i \leq j \leq k$.

Il *limite diretto* del sistema $\{G_i\}_{i \in I}$, denotato con $\varinjlim G_i$, è il quoziente $\bigsqcup G_i / \sim$, dove $g_i \in G_i$ è equivalente a $g_j \in G_j$ se e solo se esiste $k \leq i, j$ tale che $f^k_i(g_i) = f^k_j(g_j)$ in G_k.

Se $\mathcal{F}$ è un prefascio su X spazio topologico, per ogni punto $x \in X$ possiamo considerare l'insieme diretto dato dagli intorni aperti di x, con l'inclusione come ordine parziale. In tal modo la famiglia di gruppi $\mathcal{F}(U)$, insieme ai morfismi di restrizione, diventa un sistema diretto. Indichiamo con $\mathcal{F}_x$ il suo limite diretto. Chiamiamo $\mathcal{F}_x$ *spiga* del prefascio $\mathcal{F}$ in x, e *germi* di sezioni di $\mathcal{F}$ in x i suoi elementi.

Esempio 36. Consideriamo il fascio $\mathcal{O}$ delle funzioni olomorfe su un aperto di $\mathbb{C}$; un germe di funzione olomorfa in un punto a è rappresentato da una funzione olomorfa definita su tutto un intorno di a, dunque da una serie $\sum \alpha_i (z-a)^i$. Due funzioni olomorfe definite su un intorno di a determinano lo stesso germe in a se e solo se hanno lo stesso sviluppo di Taylor in a, dunque possiamo pensare $\mathcal{O}_a$ come l'anello $\mathbb{C}\{z-a\}$.

Analogamente, l'anello $\mathcal{M}_a$ dei germi di funzioni olomorfe in a è isomorfo all'anello delle serie di Laurent di parte principale finita.

Diamo ora un modo di associare ad ogni prefascio $\mathcal{F}$ un fascio $\mathfrak{F}$. Dato $\mathcal{F}$, possiamo considerare l'unione disgiunta delle sue spighe, che denotiamo con $\mathfrak{F}$. Possiamo dotare tale insieme di una topologia: definiamo per ogni U aperto di X, e per ogni $f \in \mathcal{F}(U)$,

$$\Omega_{f,U} := \{f_x \in \mathcal{F}_x \mid x \in U\}.$$

Tale famiglia ricopre chiaramente $\mathfrak{F}$, e ogni intersezione $\Omega_{f,U} \cap \Omega_{g,V}$ non vuota contiene un aperto della forma $\Omega_{h,W}$. Infatti, se φ è un elemento di tale intersezione, esso è un germe in p, con $p \in U$ e $p \in V$. Esiste dunque $h \in \mathcal{F}(U \cap V)$ rappresentante di φ nella spiga $\mathcal{F}_x$. Ma anche (U, f) e (V, g) rappresentano il germe φ in p, dunque esiste un aperto $W \subseteq U \cap V$ contenente p tale che $f|_W = h = g|_W$. Allora l'aperto cercato è esattamente $\Omega_{h,W}$, e la famiglia così costruita è una base di una topologia su $\mathfrak{F}$.

Osserviamo che la mappa di proiezione $\pi\colon \mathfrak{F} \to X$, che manda la spiga $\mathcal{F}_x$ sul punto x, è un omeomorfismo locale: sia infatti $\varphi \in \mathfrak{F}$; φ apparterrà ad una spiga di $\mathcal{F}$, diciamo $\mathcal{F}_x$, dunque $\pi(\varphi) = x$. Consideriamo un aperto di base $\Omega_{f,U}$ cui φ appartiene; allora U è un aperto di X contenente x. Inoltre la restrizione di π ad $\Omega_{f,U}$ è una mappa bigettiva che, per le definizioni date è continua e aperta, quindi un omeomorfismo su U.

Ciò detto porta alla sequente definizione:

Definizione 37. Siano X e $\mathcal{S}$ due spazi topologici e $\pi\colon \mathcal{S} \to X$ una mappa surgettiva che sia un omeomorfismo locale. Allora $\mathcal{S}$ è detto *sheaf-space* su X, e $\mathcal{S}_x := \pi^{-1}(x)$ *spiga* di $\mathcal{S}$ in x.

Sia $\mathcal{S}$ uno *sheaf-space* (possiamo pensare a $\mathcal{S}$ come al precedente $\mathfrak{F}$) e chiamiamo sezione di $\mathcal{S}$ qualsiasi mappa continua $s\colon V \to \mathcal{S}$ tale che $\pi \circ s = \mathrm{id}_V$.

Se Y è un aperto di X, denotiamo con $\Gamma(Y, \mathcal{S})$ il gruppo delle sezioni di $\mathcal{S}$ su Y; se come restrizioni consideriamo inoltre le restrizioni usuali, otteniamo un prefascio Γ. È importante notare inoltre che tale prefascio ottenuto verifica gli assiomi di fascio, e dunque è in realtà un fascio.

Possiamo ripetere il ragionamento fatto prima anche per il fascio Γ; possiamo dunque costruirne le spighe Γ_x e considerarne i germi di sezioni. In questo caso però, l'insieme dei germi di Γ in x è in corrispondenza biunivoca con la spiga $\mathcal{S}_x = \pi^{-1}(x)$. Infatti ogni $\varphi \in \Gamma_x$ è un elemento del limite diretto dei $\Gamma(U, S)$, al variare degli intorni aperti di $x \in X$; consideriamo dunque un rappresentante di φ della forma (U, s), dove s è una sezione di $\mathcal{S}$ definita su U, e senza perdita di generalità, a meno di restringere U, possiamo supporre che s sia un omeomorfismo sull'immagine, e questo grazie al fatto che π è un omeomorfismo locale. Associamo allora a φ il valore $s(x) \in \mathcal{S}_x$. Chiaramente tale valore non dipende dalle scelte fatte, ed anzi è pari al valore del germe φ in x. Viceversa, per ogni $p \in \mathcal{S}_x$ esistono intorni Ω e U tali che $\pi\colon \Omega \to U$ sia un omeomorfismo. Sia $s = \pi|_{\Omega}^{-1}$; allora associamo a p il germe di s in x. Si vede che tale associazione è l'una inversa dell'altra, e dunque la tesi.

Ciò dimostra che ad ogni *sheaf-space* $\mathcal{S}$ possiamo associare, in modo naturale, un fascio Γ (che è il fascio delle sue sezioni), e che lo *sheaf-space* costruito a partire da Γ, diciamo $\mathcal{G}$, può essere identificato con con lo spazio $\mathcal{S}$ di partenza: per quanto visto Γ_x si può identificare con $\mathcal{S}_x$, dunque l'unione disgiunta $\mathcal{G}$ si può identificare con l'unione disgiunta degli $\mathcal{S}_x$, ovvero $\mathcal{S}$.

Siccome una tale associazione è biunivoca (ed è un'equivalenza di categorie), identificheremo Γ e $\mathcal{S}$; useremo dunque lo stesso simbolo $\mathcal{S}$ per indicare sia lo *sheaf-space* $\mathcal{S}$, sia il suo fascio delle sezioni Γ. In particolare possiamo pensare direttamente $\mathcal{S}$ con la struttura di fascio ereditata da $\mathcal{G}$, e se U è un aperto di X, possiamo scrivere $\mathcal{S}(U) = \Gamma(U, \mathcal{S})$ per indicare le sezioni di $\mathcal{S}$.

Osservazione 38. In particolare, se $\mathcal{F}$ è un prefascio su X, dai discorsi precedenti si evince che il suo fascificato $\mathfrak{F}$ è, a meno di passare al fascio delle sue sezioni, un fascio, donde il nome.

Ad ogni prefascio abbiamo dunque associato un fascio, il suo fascificato. Notiamo però che tale fascio in generale non coincide con il prefascio di partenza; più precisamente, dato un prefascio $\mathcal{F}$ abbiamo un morfismo di prefasci

$$\mathcal{F}(U) \to \mathfrak{F}(U) = \Gamma(U, \mathfrak{F}), \quad f \mapsto \mathfrak{f} := (x \mapsto f_x \ \forall x \in U).$$

Questo morfismo è iniettivo se vale l'assioma di unicità, mentre è surgettivo se valgono entrambi. Ciò implica che tale associazione è un isomorfismo di prefasci se e solo se $\mathcal{F}$ risulta essere un fascio.

Quanto detto risulta utile per eliminare le distinzioni, nei prossimi paragrafi, tra fasci e prefasci. Dato $\mathcal{F}$ un prefascio su X supporremo sempre che $\mathcal{F}$ sia esso stesso un fascio, sempre a meno di passare al suo fascificato.

5 Successioni esatte

Sia $\alpha\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un omomorfismo di fasci sullo spazio topologico X. Per ogni $x \in X$ esiste un omomorfismo indotto sulle spighe:

$$\alpha_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x.$$

Definizione 39. Una successione di omomorfismi di fasci $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ è *esatta* se per ogni $x \in X$ è esatta la successione indotta $\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$. Diciamo allora che un omomorfismo è iniettivo (o surgettivo) se è tale per ogni spiga.

Lemma 40. *Sia $\alpha\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un omomorfismo iniettivo di fasci su uno spazio topologico X. Allora per ogni aperto U di X la mappa α_U è iniettiva.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{F}(U)$ e supponiamo che $\alpha_U(f) = 0$. Poiché α_x è iniettiva per ogni $x \in X$, ogni $x \in U$ ammette un intorno aperto $V_x \subseteq U$ tale che $f|_{V_x} = 0$. Ma $\mathcal{F}$ è un fascio, e dunque f deve essere identicamente nulla. $\square$

Osservazione 41. Se α è un omomorfismo di fasci surgettivo, non è detto che per ogni $U \subseteq X$ aperto la mappa $\alpha_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ sia surgettiva. Come esempio possiamo ancora considerare la mappa $\exp\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$; infatti per ogni x la mappa $\exp_x\colon \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}^*_x$ è surgettiva, in quanto ogni funzione non identicamente nulla ammette una determinazione del logaritmo in un opportuno intorno. Tuttavia la mappa $\exp\colon \mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \to \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)$ non è surgettiva.

Lemma 42. *Sia $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ una successione esatta da fasci sullo stesso spazio topologico X. Allora, per ogni U aperto di X la successione*

$$0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(U)$$

è esatta.

Dimostrazione. Dal Lemma precedente si evince l'esattezza in $\mathcal{F}(U)$.

Sia $f \in \mathcal{F}(U)$ e $g = \alpha(f)$. Poiché la successione di fasci è esatta, tale è la successione delle spighe; allora ogni punto $x \in U$ ha un intorno $V_x \subseteq U$ tale che $\beta(g)|_{V_x} = 0$. Dunque dagli assiomi di fascio si evince che $\beta(g) = 0$.

Infine supponiamo che $g \in \mathcal{G}(U)$ sia tale che $\beta(g) = 0$. Per ogni $x \in U$ $\mathrm{Ker}(\beta_x) = \mathrm{Im}(\alpha_x)$, dunque esiste un ricoprimento aperto $\{V_i\}$ di U, ed elementi $f_i \in \mathcal{F}(V_i)$, tali che $\alpha_{V_i}(f_i) = g|_{V_i}$ per ogni i. Su ogni intersezione $V_i \cap V_j$ si ha $\alpha(f_i) = \alpha(f_j)$, quindi $f_i = f_j$ su tutto $V_i \cap V_j$. Esiste allora $f \in \mathcal{F}(U)$ con $f|_{V_i} = f_i$ per ogni i. Poiché $\alpha(f)|_{V_i} = \alpha(f|_{V_i}) = g|_{V_i}$ segue, ancora dalle proprietà di fascio, questa volta di $\mathcal{G}$, che $\alpha(f) = g$. $\square$

Esempio 43. Sia X una superficie di Riemann. Diamo allora qualche esempio di successione esatta di fasci. Ponendo $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}(\mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)})$ il fascio delle forme differenziabili chiuse, la successione

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{K} \to 0$$

è esatta; infatti d è surgettiva perché, localmente, ogni forma chiusa è esatta. Analogamente, vale:

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega \to 0.$$

Infine, per quanto visto prima, anche la seguente successione di fasci è esatta:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0.$$

Sarebbe dunque utile sapere quando la successione indotta a livello delle sezioni da una successione esatta di fasci resta esatta. Infatti dalla definizioni si evince che l'esattezza di una successione di fasci è un fatto puramente locale, mentre l'esattezza della successione a livello delle sezioni è data da proprietà globali.

Nella identificazione fatta nella sezione precedente tra fascificati e fasci di sezioni dobbiamo stare dunque attenti alla nozione di successione esatta usata: a livello di fascificati è utile utilizzare la definizione precedente, mentre a livello del fascio di sezioni è più utile studiare l'esattezza per ogni fissato aperto di X. Proprio questo fenomeno è studiato dalla coomologia dei fasci.

6 Coomologia di Čech

Obiettivo di questa sezione è definire la coomologia di Čech a valori in un (pre)fascio. Questa è stata la prima teoria coomologica per lo studio della coomologia dei fasci.

Sia X uno spazio topologico ed $\mathcal{F}$ un fascio in gruppi abeliani su X. Fissiamo un ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ di X e denotiamo per semplicità:

$$U_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n} = U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}$$

Definiamo allora l'n-esimo gruppo di cocatene di $\mathfrak{U}$ in $\mathcal{F}$ come:

$$C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(\alpha_0,\dots,\alpha_n) \in J^n} \mathcal{F}(U_{\alpha_0\dots\alpha_n})$$

La struttura di gruppo abeliano di $C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ è quella indotta dalla legge di gruppo sulle sezioni di $\mathcal{F}$, ed una n-cocatena è quindi una collezione di sezioni locali del prefascio $\mathcal{F}$.

Il differenziale $\delta^n \colon C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ è invece definito dalla formula:

$$(\delta c)_{\alpha_0\dots\alpha_{n+1}} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j c_{\alpha_0\dots\widehat{\alpha_j}\dots\alpha_{n+1}}|_{U_{\alpha_0\dots\alpha_{n+1}}} \quad \forall c \in C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

dove il cappuccio indica l'elemento da saltare e le restrizioni sono quelle di prefascio. Si verifica facilmente che $\delta^2 = 0$, dunque possiamo dare la seguente:

Definizione 44. Il complesso di cocatene $(C^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), \delta)$ è detto *complesso di Čech*, e la relativa coomologia $\check{H}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := H(C^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$ è detta *coomologia di Čech di $\mathcal{F}$ relativa al ricoprimento* $\mathfrak{U}$.

Osservazione 45. Calcoliamo il differenziale a livello 0 e 1:

- $(\delta c)_{\alpha\beta} = (c_\beta - c_\alpha)|_{U_{\alpha\beta}}$ per ogni $(c_\alpha) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$;
- $(\delta c)_{\alpha\beta\gamma} = (c_{\beta\gamma} - c_{\alpha\gamma} + c_{\alpha\beta})|_{U_{\alpha\beta\gamma}}$ per ogni $(c_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Ciò mostra che gli 0-cocicli della coomologia di Čech sono le 0-cocatene (c_α) tali che $c_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = c_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$ per ogni intersezione di due aperti del ricoprimento. Dunque, se $\mathcal{F}$ era un fascio, la famiglia dei c_α definisce una unica sezione globale $f \in \mathcal{F}(X)$ tale che $f|_{U_\alpha} = c_\alpha$. Quindi

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X).$$

Dall'osservazione fatta si evince che una 1-cocatena $(c_{\alpha\beta})$ è un 1-cociclo precisamente se su ogni $U_{\alpha\beta\gamma}$ si ha:

$$c_{\alpha\gamma} = c_{\beta\gamma} + c_{\alpha\beta}.$$

Chiamiamo tale uguaglianza *relazione di cociclo*, e osserviamo che essa implica:

$$c_{\alpha\alpha} = 0 \text{ ponendo } \alpha = \beta = \gamma$$

e

$$c_{\alpha\beta} = -c_{\beta\alpha} \text{ ponendo } \alpha = \gamma.$$

I gruppi di coomologia così definiti dipendono ancora dal ricoprimento $\mathfrak{U}$ scelto; per svincolarsi da tale dipendenza, l'idea è di passare al limite diretto indicizzato dai ricoprimenti aperti di X. L'insieme dei ricoprimenti aperti di uno spazio topologico, con l'ordine parziale di raffinamento, è un sistema diretto. Per passare al limite diretto ci serve dare alla famiglia di gruppi $\{\check{H}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\}$ la struttura di sistema diretto di gruppi.

Definizione 46. Sia $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ un raffinamento di $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Chiamiamo *funzione di raffinamento* una mappa $\varphi\colon B \to A$ tale che $V_\beta \subseteq U_{\varphi(\beta)}$ per ogni $\beta \in B$.

Dato un prefascio in gruppi abeliani $\mathcal{F}$ e una funzione di raffinamento φ definiamo

$$\varphi^\#\colon C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \quad \varphi^\#(c)_{\beta_0\dots\beta_n} = c_{\varphi(\beta_0)\dots\varphi(\beta_n)}|_{V_{\beta_0\dots\beta_n}}$$

Osserviamo che il morfismo $\varphi^\#$ così definito commuta con il differenziale δ, e dunque è un morfismo di complessi di cocatene:

$$(\delta\varphi^\# c)_{\beta_0\dots\beta_n} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j c_{\varphi(\beta_0)\dots\widehat{\varphi(\beta_j)}\dots\varphi(\beta_n)} = (\delta c)_{\varphi(\beta_0)\dots\varphi(\beta_n)} = (\varphi^\#\delta c)_{\beta_0\dots\beta_n}$$

Lemma 47. *Se φ, ψ sono due funzioni di raffinamento, allora $\varphi^\#$ e $\psi^\#$ sono morfismi di cocatene omotopi.*

Dimostrazione. Basta definire l'operatore di omotopia $H^n\colon C^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ come:

$$(Hc)_{\beta_0,\dots,\beta_n} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j c_{\varphi(\beta_0)\dots\varphi(\beta_j)\psi(\beta_j)\dots\psi(\beta_n)}|_{V_{\beta_0\dots\beta_n}}$$

Si può verificare facilmente che H è effettivamente tale che $\psi^\# - \varphi^\# = \delta H + H\delta$, e dunque i due morfismo sono omotopi. $\square$

Dunque φ e ψ inducono in coomologia una mappa dipendente solo dai ricoprimenti $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{V}$:

$$\tau^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} := \varphi^* = \psi^*\colon \check{H}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^*(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

Poiché composizione di funzione di raffinamento è una funzione di raffinamento, abbiamo ottenuto il sistema diretto cercato.

Definizione 48. Chiamiamo *coomologia di Čech di X a valori in $\mathcal{F}$* il limite diretto

$$\check{H}^*(X,\mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^*(\mathfrak{U},\mathcal{F})$$

calcolato al variare di $\mathfrak{U}$ tra i ricoprimenti aperti di X.

Sia $\alpha\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci; allora per ogni ricoprimento $\mathfrak{U}$ abbiamo un morfismo di cocatene indotto

$$\alpha^{\#}\colon C^*(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to C^*(\mathfrak{U},\mathcal{G})$$

che associa ad ogni cocatena $\xi \in C^n(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ la cocatena $\alpha^{\#}(\xi) := \alpha(\xi) \in \mathbb{C}^n(\mathfrak{U},\mathcal{G})$; questa mappa manda cocicli in cocicli, cobordi in cobordi, quindi induce un morfismo in coomologia:

$$\alpha^*\colon \check{H}^*(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^*(\mathfrak{U},\mathcal{G})$$

Infine, al variare di $\mathfrak{U}$ tra i ricoprimenti aperti di X otteniamo anche un morfismo tra le coomologie di Čech. Osserviamo che tale mappa indotta, a livello 0 non è altri che la mappa $\alpha_X\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$.

Supponiamo allora di avere una successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0.$$

Vorremmo, a partire da questa, costruire una successione esatta lunga in coomologia; tuttavia, in tutta generalità, non è chiaro come procedere. Noi ci concentreremo sull'esistenza di un omomorfismo di connessione a livello 0, i.e.

$$\delta^*\colon \check{H}^0(X,\mathcal{H}) \to \check{H}^1(X,\mathcal{F}).$$

A questo scopo sia $h \in \mathcal{H}(X) = \check{H}^0(X,\mathcal{H})$. Poiché gli omomorfismi β_x sono surgettivi per ogni $x \in X$, esiste un ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ e una cocatena $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U},\mathcal{G})$ tale che $\beta(g_i) = h|_{U_i}$ per ogni $i \in I$. Quindi $\beta(g_j - g_i) = 0$ su $U_i \cap U_j$; la successione $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ è esatta, dunque esistono $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ tali che $\alpha(f_{ij}) = g_j - g_i$. Ma allora su $U_i \cap U_j \cap U_k$ si ha $\alpha(f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}) = 0$, e per iniettività di α si ha $f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$, ovvero (f_{ij}) è un cociclo in $C^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})$.

Definiamo allora $\delta^*h := [(f_{ij})] \in \check{H}^1(X,\mathcal{F})$, ovvero come la sua classe in coomologia. Si può vedere che tale scelta non dipende dalle scelte fatte, e che come conseguenza vale il seguente:

Teorema 49. *Sia X uno spazio topologico e $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ una successione esatta di fasci. Allora anche la successione*

$$0 \to \check{H}^0(X,\mathcal{F}) \to \check{H}^0(X,\mathcal{G}) \to \check{H}^0(X,\mathcal{H}) \to \check{H}^1(X,\mathcal{F}) \to \check{H}^1(X,\mathcal{G}) \to \check{H}^1(X,\mathcal{H})$$

è esatta.

Teorema 50. *Sia X una superficie di Riemann ed $\mathcal{E}$ il fascio delle funzioni differenziabili su X. Allora $\check{H}^1(X,\mathcal{E}) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{U} = (U_i)_i$ un ricoprimento aperto di X; allora esiste una partizione dell'unità subordinata a $\mathfrak{U}$, diciamo ψ_i. Sia (f_{ij}) un cociclo in $Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{E})$. Allora la funzione $\psi_j f_{ij}$, ben definita su $U_i \cap U_j$, si può estendere, in modo differenziabile, a tutto U_i. Poniamo

$$g_i = \sum_j \psi_j f_{ij} \in \mathcal{E}(U_i).$$

Allora $g_j - g_i = \sum_k \psi_k f_{ik} - \sum_k \psi_k f_{jk} = \sum_k \psi_k (f_{ik} - f_{jk}) = \sum_k \psi_k (f_{ik} + f_{kj}) = f_{ij}$. $\square$

Come è facile notare, l'unica proprietà importante di $\mathcal{E}$ usata nel Teorema precedente, è che $\mathcal{E}$ ammette partizioni dell'unità. La stessa dimostrazione (anche per altri gruppi di coomologia), vale dunque per i fasci $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{1,0}, \mathcal{E}^{0,1}, \mathcal{E}^{(2)}$ e così via.

Teorema 51 (di Laray)**.** *Sia $\mathcal{F}$ un fascio in gruppi abeliani sullo spazio topologico X, e supponiamo che $\mathfrak{U}$ sia un ricoprimento aperto di X tale che $\check{H}^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $U_i \in \mathfrak{U}$. Allora*

$$\check{H}^1(X, \mathcal{F}) = \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{V}$ un raffinamento di $\mathfrak{U}$, e consideriamo la mappa di restrizione $\tau^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$. Sia (f_{ij}) un cociclo di $\mathfrak{U}$ la cui immagine in $\mathfrak{V}$ sia nulla in coomologia. Allora esiste $(g_k) \in C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ tale che $f_{\tau(k),\tau(l)} = g_k - g_l$ su $V_k \cap V_l$. Dalle relazioni di cociclo si ha allora, su $V_k \cap V_l \cap U_i$,

$$g_k - g_l = f_{\tau(k),\tau(l)} = f_{\tau(k),i} + f_{i,\tau(l)} = f_{i,\tau(l)} - f_{i,\tau(k)}$$

e dunque $g_k + f_{i,\tau(k)} = g_l + f_{i,\tau(l)}$. Dagli assiomi di fascio, applicati alla famiglia di aperti $\{U_i \cap V_k\}_k$ otteniamo degli $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tali che $h_i = g_k + f_{i,\tau(k)}$ su $U_i \cap V_k$. Allora

$$f_{ij} = f_{i,\tau(k)} + f_{\tau(k),j} = f_{i,\tau(k)} + g_k - f_{j,\tau(k)} - g_k = h_i - h_j.$$

Dall'arbitrarietà di k segue che l'equazione data è valida su tutto $U_i \cap U_j$, ancora per proprietà di fascio, ovvero il cociclo iniziale era un cobordo. Ciò dimostra l'iniettività di $\tau^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$.

Sia ora $(f_{pq}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$. La famiglia $\{U_i \cap V_p\}_p$ è un ricoprimento aperto di U_i, e lo chiamiamo $U_i \cap \mathfrak{V}$. Per ipotesi $\check{H}^1(U_i \cap \mathfrak{V}, \mathcal{F}) = 0$, quindi esiste $g_{ip} \in \mathcal{F}(U_i \cap V_p)$ tale che $f_{pq} = g_{ip} - g_{iq}$ su $U_i \cap V_p \cap V_q$. Sull'intersezione $U_i \cap U_j \cap V_p \cap V_q$ si ha inoltre $g_{jp} - g_{ip} = g_{jq} - g_{iq}$ e poiché $\mathcal{F}$ è un fascio, devono allora esistere $F_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ tali che

$$F_{ij} = g_{jp} - g_{ip}$$

su $U_i \cap U_j \cap V_p$. Osserviamo che $F_{ij} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, e poniamo $h_p = g_{\tau(p)p}|_{V_p} \in \mathcal{F}(V_p)$. Allora su $V_p \cap V_q$ si avrà:

$$F_{\tau(p)\tau(q)} - f_{pq} = (g_{\tau(q)p} - g_{\tau(p)p}) - (g_{\tau(q)p} - g_{\tau(q)q}) = g_{\tau(q),q} - g_{\tau(p)p} = h_q - h_p$$

e dunque $F - f$ è la classe nulla relativamente al ricoprimento $\mathfrak{V}$. $\square$

7 Il lemma di Dolbeault

Richiamiamo brevemente il Lemma di Dolbeault, visto a lezione:

Lemma 52 (Lemma di Dolbeault)**.** *Sia $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ una funzione a supporto compatto. Allora esiste una funzione $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ tale che*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

Teorema 53 (Teorema di Dolbeault)**.** *Siano $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, con $0 < R \leq \infty$ e $g \in \mathcal{E}(X)$. Allora esiste $f \in \mathcal{E}(X)$ tale che*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

Teorema 54. *Sia $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, con $0 < R \leq \infty$. Allora $\check{H}^1(X, \mathcal{O}) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{U}$ un ricoprimento aperto di X e consideriamo un cociclo $f_{ij} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \subseteq Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$. Poiché $\check{H}^1(X, \mathcal{E}) = 0$, esiste allora una cocatena $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$ tale che $f_{ij} = g_j - g_i$ su $U_i \cap U_j$. Le f_{ij} sono però olomorfe, e dunque $\bar{\delta} g_i = \bar{\delta} g_j$, che ci mostra l'esistenza di una funzione globale $h \in \mathcal{E}(X)$ tale che $h|_{U_i} = \bar{\delta} g_i$.

Per il Teorema precedente, possiamo allora trovare una funzione $g \in \mathcal{E}(X)$ tale che $\bar{\delta} g = h$. Definiamo allora

$$f_i := g_i - g;$$

osserviamo che $\bar{\delta} f_i = \bar{\delta} g_i - \bar{\delta} g$ e per costruzione tale differenza è nulla. Le f_i sono allora delle funzioni olomorfe, da cui si ha $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Infine, sulle intersezioni $U_i \cap U_j$ si ha $f_i - f_j = g_i - g_j = f_{ij}$, ovvero la tesi. $\square$

Teorema 55. $\check{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) = 0$.

Dimostrazione. Siano $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} \simeq \mathbb{C}$ e $U_2 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{C}$. Dal Teorema precedente questi due aperti hanno coomologia (a livello 1) banale. Allora $\mathfrak{U} := \{U_1, U_2\}$ è un ricoprimento di Leray per $\mathbb{P}^1$, e quindi $\check{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) = \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Il Teorema si riduce allora a dimostrare che ogni cociclo $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ è un cobordo.

Per concludere ci basta trovare dunque delle funzioni $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tali che $f_{12} = f_1 - f_2$ su $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$. Scriviamo f_{12} in serie di Laurent in $\mathbb{C}^*$, diciamo

$$f_{12}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n;$$

poniamo

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ e } f_2(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n.$$

Allora le mappe f_i sono olomorfe su U_i e si ha, come cercato, $f_{12} = f_1 - f_2$ su $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$. $\square$

8 Finitezza della coomologia

In questa sezione proviamo che ogni superficie di Riemann compatta il gruppo $\check{H}^1(X, \mathcal{O})$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita, e chiamiamo *genere di* X tale dimensione. Mostreremo quindi che su X esistono funzioni meromorfe non costanti.

Definizione 56. Siano $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto del piano complesso, ed $f \in \mathcal{O}(D)$ una funzione olomorfa. Definiamo allora la sua norma come

$$\|f\|_{L^2(D)} := \left(\int_D |f(x+iy|^2 dxdy \right)^{1/2}$$

ovvero come la norma 2 della sua scrittura in coordinate reali. Denotiamo con $L^2(D, \mathcal{O})$ lo spazio vettoriale dato da tutte le funzioni olomorfe di quadrato integrabile, ovvero di norma 2 finita.

Tale spazio è dotato del prodotto scalare usuale,

$$< f, g >:= \int_D f\bar{g} dxdy$$

che lo rende uno spazio di Hilbert.

Osservazione 57. Le funzioni $(z-\alpha)^n$ danno un sistema ortogonale completo di $L^2(B(\alpha,r),\mathcal{O})$. Inoltre, passando alle coordinate polari, si ha $\|(z-\alpha)^n\|_{L^2(B(\alpha,r))} = \frac{\sqrt{\pi}r^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ per ogni n. In particolare, se $f \in L^2(B(\alpha,r),\mathcal{O})$ e $f(z) = \sum_n c_n(z-\alpha)^n$ è il suo sviluppo di Taylor, allora

$$\|f\|^2_{L^2(B(\alpha,r)} = \sum_n \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}|c_n|^2.$$

Vogliamo ora dare una norma anche agli spazi vettoriali $C^0(\mathfrak{U},\mathcal{O})$ e $C^1(\mathfrak{U},\mathcal{O})$ per una arbitraria superficie di Riemann X.

Scegliamo a questo scopo una famiglia finita di carte (non necessariamente un ricoprimento) $\{(U_i^*,z_i)\}_{i=1}^n$ tali che $z_i(U_i^*) \subseteq \mathbb{C}$ sia un disco. Scegliamo per ogni tale i un aperto $U_i \subseteq U_i^*$ e indichiamo con $\mathfrak{U}$ la famiglia di tali aperti (rispettivamente $\mathfrak{U}^*$ la famiglia data dagli aperti (U_i^*)). Indichiamo invece con $|\mathfrak{U}|$ l'unione $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ su cui possiamo considerare gi gruppi di cocatene a coefficenti in $\mathcal{O}$. Scriveremo $C^p(\mathfrak{U},\mathcal{O})$ per indicare tali gruppi (omettendo per semplicità le barre verticali di $|\mathfrak{U}|$). Restringendoci ai casi $p=0$ o $p=1$ (che sono i casi per noi interessanti), definiamo allora la norma su tali spazi, modellandola sulla norma L^2:

Definizione 58. Siano $\eta = (f_i) \in C^0(\mathfrak{U},\mathcal{O})$ e $\xi = (f_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U},\mathcal{O})$; poniamo allora

$$\|\eta\|^2_{L^2(\mathfrak{U})} := \sum_i \|f_i\|^2_{L^2(U_i)} \text{ e } \|\xi\|^2_{L^2(\mathfrak{U})} := \sum_{i,j} \|f_{ij}\|^2_{L^2(U_i\cap U_j)}$$

dove le norme di f_i e f_{ij} sono calcolate rispetto alle carte (U_i^*,z_i), ovvero

$$\|f_i\|^2_{L^2(U_i)} := \|f_i \circ z_i^{-1}\|^2_{L^2(z_i(U_i))} \text{ e } \|f_{ij}\|^2_{L^2(U_i\cap U_j)} := \|f_{ij} \circ z_i^{-1}\|^2_{L^2(z_i(U_i\cap U_j))}.$$

Indichiamo con $C^p_2(U,\mathcal{O})$ l'insieme delle cocatene in $C^p(U,\mathcal{O})$, con $p=0,1$, aventi norma finita. Notiamo che tale insieme risulta essere un sottospazio vettoriale con struttura di spazio di Hilbert.

Lemma 59. *Siano $D' \Subset D$ aperti di $\mathbb{C}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottospazio vettoriale chiuso A di $L^2(D,\mathcal{O})$ di codimensione finita tale che:*

$$\|f\|_{L^2(D')} \leq \varepsilon \|f\|_{L^2(D)}$$

per ogni $f \in A$.

Dimostrazione. Per ipotesi $\overline{D'}$ è un compatto di D, dunque esiste $r > 0$ ed un numero finito di punti di D, diciamo $a_1,\ldots,a_k$, tali che:

- $B(a_j,r) \subseteq D$ per ogni j;
- $D' \subset \bigcup_j B(a_j,r/2)$.

Fissiamo $n \in \mathbb{N}^+$ abbastanza grande e chiamiamo A l'insieme di tutte le funzioni f in $L^2(D,\mathcal{O})$ che si annullano in tutti i punti a_j con ordine almeno n. È dunque chiaro che A è un sottospazio vettoriale di codimensione non maggiore di kn.

Sia allora $f \in A$ e scriviamo la sua serie di Taylor in un intorno di a_j, diciamo $\sum_{i\geq n} c_i(z-a_j)^i$, dove la somma parte da n perché f si annulla in a_j con ordine almeno n. Per ogni $\rho \leq r$, vista l'Osservazione precedente, si ha:

$$\|f\|^2_{L^2(B(a_j,\rho))} = \sum_{i\geq n} \frac{\pi\rho^{2i+2}}{i+1}|c_i|^2$$

Da questa stima segue che, per $\rho = r/2$, $\|f\|^2_{L^2(B(a_j,r/2))} \leq 2^{-(n+1)}\|f\|^2_{L^2(B(a_j,r))}$. Dunque, dalle assunzioni fatte sugli a_j si ha $\|f\|^2_{L^2(B(a_j,r/2))} \leq \|f\|^2_{L^2(D)}$ e

$$\|f\|^2_{L^2(D')} \leq \sum_{j=1}^{k} \|f\|^2_{L^2(B(a_j,r/2))}.$$

Quindi si ha finalmente $\|f\|^2_{L^2(D')} \leq k2^{-(n+1)}\|f\|^2_{L^2(D)} \leq \varepsilon\|f\|^2_{L^2(D')}$, a patto di scegliere n tale che $k2^{-n-1} \leq \varepsilon$. $\square$

Se $V_i \Subset U_i$ sono aperti relativamente compatti per $i \in I$, scriveremo concisamente $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$. Con questa ipotesi (relativa compattezza) si ha che ogni cocatena $\xi \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ è tale che $\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} < \infty$. Dunque, dal Lemma precedente, segue che per ogni ε esiste un sottospazio vettoriale chiuso di codimensione finita A in $Z^p_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ tale che $\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} \leq \varepsilon\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})}$ per ogni $\xi \in A$.

Lemma 60. *Sia X una superficie di Riemann e $\mathfrak{U}^*$ una famiglia finita di carte di X le cui immagini siano dei dischi di $\mathbb{C}$. Supponiamo che si abbia $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V} \ll \mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$. Allora esiste una costante $C > 0$ tale che $\forall \xi \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ $\exists \zeta \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, $\eta \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ con:*

$$\zeta = \xi + \delta\eta \quad e \quad \max(\|\zeta\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{W})}) \leq C\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})}.$$

Dimostrazione. Sia $\xi \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ un cociclo, diciamo $\xi = (f_{ij})$ dove le f_{ij} sono tutte funzioni olomorfe, di quadrato integrabile sui rispettivi domini. La condizione di olomorfia ci dice che tali funzioni sono anche differenziabili, e poiché il primo gruppo di coomologia a coefficenti nel fascio delle funzioni differenziabili è banale, devono esistere delle funzioni differenziabili g_i e una cocatena $(g_i) \in C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{E})$ tali che $f_{ij} = g_j - g_i$ per ogni i, j.

Sfruttando ancora il fatto che le funzioni f_{ij} sono olomorfe si ha, dall'uguaglianza precedente, che $d''(g_i) = d''(g_j)$ su tutto $V_i \cap V_j$. Deve allora esistere una forma differenziabile ω su tutto $|\mathfrak{V}|$, $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(|\mathfrak{V}|)$, tale che $\omega|_{V_i} = d''(g_i)$. Per ipotesi sappiamo che $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V}$, dunque esiste una funzione differenziabile $\psi \in \mathcal{E}(X)$ il cui supporto è contenuto in $\mathfrak{V}$ e tale che la restrizione $\psi|_{|\mathfrak{W}|} = 1$. Quindi possiamo considerare la forma globale $\psi\omega$, considerata come una forma in $\mathcal{E}^{0,1}(|\mathfrak{U}^*|)$.

Per il Teorema 53, per ogni indice i, devono esistere allora delle funzioni $h_i \in \mathcal{E}(U_i^*)$ tali che $d''h_i = \psi\omega$ su U_i^*. Su ogni intersezione $U_i^* \cap U_j^*$ si deve dunque avere $d''h_i = \psi\omega = d''h_j$, da cui si evince che le mappe $F_{ij} := h_j - h_i$ sono olomorfe su tutto $\mathcal{O}(U_i^* \cap U_j^*)$.

Poniamo infine $\zeta := (F_{ij})|_{\mathfrak{U}} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$; sempre per relativa compattezza dei ricoprimenti, si ha inoltre che le F_{ij} sono di quadrato sommabile, così some gli h_i. Dunque, dalla relazione che definisce gli F_{ij} si evince che questi danno un cociclo in $Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. La relazione data si riferisce al ricoprimento $\mathfrak{W}$, dove per ogni W_i si ha $d''h_i = \psi\omega = \omega = d''g_i$. Ciò prova che $h_i - g_i$ è olomorfa su W_i. Definiamo allora la cocatena $\eta := (h_i - g_i)|_{\mathfrak{W}} \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$. Ora,

$$F_{ij} - f_{ij} = (h_j - g_j) - (h_i - g_i) \text{ su tutto } W_i \cap W_j$$

e quindi la prima parte della tesi.

Resta da verificare la stima sulle norme. Consideriamo a questo scopo lo spazio di Hilbert

$$H := (Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \times Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) \times C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}), \|\cdot\|_H)$$

dove $\|(\zeta, \xi, \eta)\|_H := (\|\zeta\|^2_{L^2(\mathfrak{U})} + \|\xi\|^2_{L^2(\mathfrak{V})} + \|\eta\|^2_{L^2(\mathfrak{W})})^{1\backslash 2}$, che è la norma standard sul prodotto di spazi di Hilbert. Sia $L \subseteq H$ il sottospazio

$$L := \{(\zeta, \xi, \eta) \in H \mid \zeta = \xi + \delta\eta \text{ su } \mathfrak{W}\}.$$

Come si può notare, L è un sottospazio chiuso, dunque esso stesso di Hilbert; per la parte già dimostrata, la proiezione sulla seconda componente, che è una mappa continua, è ancora surgettiva se la si pensa ristretta ad L, ovvero $\pi_L : L \to Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$. Possiamo allora applicare il Teorema della Mappa Aperta, da cui la tesi in quento π_L risulta essere aperta. □

Lemma 61. *Nelle stesse ipotesi del Lemma precedente, esiste un sottospazio S di dimensione finita di $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ tale che $\forall \xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ $\exists \sigma \in S$, $\eta \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ tali che su $\mathfrak{W}$ si abbia*

$$\sigma = \xi + \delta\eta.$$

Dimostrazione. Sia C la costante del Lemma precedente, e poniamo $\varepsilon := 1/2C$. Abbiamo già osservato che, poiché $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$, esiste un sottospazio chiuso $A \subseteq Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ di codimensione finita, tale che $\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} \leq \varepsilon \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})}$ per ogni $\xi \in A$. Scegliamo allora S come il complemento ortogonale di A in $Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, e vediamo che soddisfa la tesi.

Fissiamo un elemento $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$; per relativa compattezza di $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{U}$ ξ è di quadrato integrabile su $\mathfrak{V}$, diciamo che si ha $\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} = M < \infty$, e dal Lemma precedente esistono $\zeta_0 \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, $\eta_0 \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$, tali che su $\mathfrak{W}$ si abbia

$$\zeta_0 = \xi + \delta\eta_0$$

con $\|\zeta_0\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_0\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq CM$. Possiamo ora scrivere ζ_0, grazie alla decomposizione ortogonale, come

$$\zeta_0 = \xi_0 + \sigma_0, \text{ con } \xi_0 \in A, \ \sigma_0 \in S.$$

Ma proprio perché tale decomposizione è ortogonale, si ha la disuguaglianza tra le norme $\|\xi_0\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq \|\zeta_0\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq CM$. Siccome $\xi_0 \in A$, si ha anche

$$\|\xi_0\|_{L^2(\mathfrak{V})} \leq \varepsilon \|\xi_0\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq \varepsilon CM \leq 2^{-1}M.$$

Ancora per il Lemma precedente, esistono $\zeta_1 \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ e $\eta_1 \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ tali che $\zeta_1 = \xi_0 + \delta\eta_1$ su $\mathfrak{W}$, e $\|\zeta_1\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_1\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq C\|\xi_0\|_{L^2(\mathfrak{V})} \leq 2^{-1}CM$. Applicando ancora la decomposizione ortogonale, troviamo $\xi_1 \in A$, $\sigma_1 \in S$ tali che $\zeta_1 = \xi_1 + \sigma_1$. È chiaro a questo punto che si possono iterare tutte le costruzioni fatte, costruendo per induzione elementi

$$\zeta_i \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}), \quad \eta_i \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}), \quad \xi_i \in A, \quad \sigma_i \in S$$

che soddisfino le seguenti condizioni:

1. $\zeta_i = \xi_{i-1} + \delta\eta_i$ su $\mathfrak{W}$;
2. $\zeta_i = \xi_i + \sigma_i$;
3. $\|\zeta_i\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_i\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq 2^{-i}CM$.

Partendo dalla prima equazione $\zeta_0 = \xi + \delta\eta_0$ e sostituendo, per mezzio di (1) e (2), fino all'indice k, otteniamo su $\mathfrak{W}$ l'uguaglianza:

$$\xi + \delta\eta_0 = \xi_k - \delta\left(\sum_{j=1}^{k} \eta_j\right) + \sum_{i=0}^{k} \sigma_i.$$

Per (2) e (3) invece si ha la disuguaglianza sulle norme:

$$\max(\|\xi_i\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\sigma_i\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_i\|_{L^2(\mathfrak{W})}) \leq 2^{-i}CM.$$

Quindi la successione ξ_i converge a 0 per i che tende ad infinito, mentre sono convergenti le serie $\sigma := \sum_i \sigma_i$, $\eta := \sum_i \eta_i$, che danno rispettivamente un elemento di S e di $C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$. Mandando al limite i si ha dunque $\sigma = \xi + \delta\eta$ su $\mathfrak{W}$, ovvero la tesi. □

Osserviamo che il Lemma ci dice che la mappa di restrizione $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \to \check{H}^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ ha immagine finito-dimensionale.

Prima di proseguire osserviamo che, se $Y \subseteq X$ è un aperto di uno spazio topologico, e $\mathcal{F}$ è un fascio su X, allora per ogni ricoprimento $\mathfrak{U}$ di X, $\mathfrak{U} \cap Y$ risulta essere un ricoprimento aperto di Y, e le ovvie mappe di restrizione inducono i successivi omomorfismi $Z^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to Z^p(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{F})$, $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{F})$ ed infine $\check{H}^p(X, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(Y, \mathcal{F})$.

Teorema 62. *Sia X una superficie di Riemann e $Y_1 \Subset Y_2$ aperti di X. Allora l'omomorfismo di restrizione*

$$\check{H}^1(Y_2, \mathcal{O}) \to \check{H}^1(Y_1, \mathcal{O})$$

ha immagine di dimensione finita.

Dimostrazione. Possiamo costruire una famiglia finita di carte (U_i^*, z_i) di X, e aperti relativamente compatti $W_i \Subset V_i \Subset U_i \Subset U_i^*$ tali che:

- $Y_1 \subseteq \bigcup_i W_i := Y' \Subset Y'' := \bigcup_i U_i \subseteq Y_2$;
- per ogni i, $z_i(U_i^*), z_i(U_i), z_i(W_i)$ sono dei dischi di $\mathbb{C}$.

Per il Lemma precedente, la mappa di restrizione $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \to \check{H}^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ ha immagine di dimensione finita. Per il Teorema 54, $\check{H}^1(U_i, \mathcal{O}) = \check{H}^1(W_i, \mathcal{O}) = 0$. Quindi, per il Teorema di Leray abbiamo $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = \check{H}^1(Y'', \mathcal{O})$ e $\check{H}^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}) = \check{H}^1(Y', \mathcal{O})$.

Dalla successione di mappe

$$\check{H}^1(Y_2, \mathcal{O}) \to \check{H}^1(Y'', \mathcal{O}) \to \check{H}^1(Y', \mathcal{O}) \to \check{H}^1(Y_1, \mathcal{O})$$

si evince la tesi. $\square$

Corollario 63. *Sia X una superficie di Riemann compatta. Allora*

$$dim(\check{H}^1(X, \mathcal{O})) < \infty.$$

Dimostrazione. Poiché X è compatta, poniamo $Y_1 = Y_2 = X$ nel teorema precedente. $\square$

Definizione 64. Sia X una superficie di Riemann compatta. Chiamiamo *genere di X* il numero

$$g := \dim(\check{H}^1(X, \mathcal{O})).$$

Teorema 65. *Sia X una superficie di Riemann e $Y \Subset X$ un aperto relativamente compatto. Allora per ogni $a \in Y$ esiste una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}(Y)$ che ha un polo in a ed è olomorfa su tutto $Y \setminus \{a\}$.*

Dimostrazione. Dal Teorema precedente sappiamo che la dimensione dell'immagine della mappa $\check{H}^1(X, \mathcal{O}) \to \check{H}^1(Y, \mathcal{O})$ è finita, diciamo essere k. Sia (U, z) una carta centrata in a. Sia $V := X \setminus \{a\}$, e chiamiamo $\mathfrak{U}$ il ricoprimento di X dato da questi due aperti.

Le funzioni z^{-i}, con $i = 1, \ldots, k+1$, sono tutte olomorfe su $U \setminus \{a\} = U \cap V$ e rappresentano dei cocicli $\zeta_i \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Poiché la dimensione dell'immagine della mappa $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \to \check{H}^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})$ è minore di $k+1$, le restrizioni $\zeta_i|_Y \in Z^1(Y \cap \mathfrak{U}, \mathcal{O})$, per $i = 1, \ldots, k+1$, sono linearmente indipendenti, modulo un cobordo. Esiste allora una cocatena $\eta = (f_1, f_2) \in C^0(Y \cap \mathfrak{U}, \mathcal{O})$, ed esistono dei numeri complessi non nulli c_i, tali che $c_1\zeta_1 + \cdots + c_{k+1}\zeta_{k+1} = \delta\eta$ in $\mathfrak{U} \cap Y$; ciò è equivalente a

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i z^{-i} = f_2 - f_1 \text{ su } U \cap V \cap Y.$$

Esiste dunque una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}(Y)$ che coincide con $f_1 + \sum_{i=1}^{k+1} c_i z^{-i}$ su $U \cap Y$ e che è uguale a f_2 su $V \cap Y = Y \setminus \{a\}$. $\square$

Corollario 66. *Sia X una superficie di Riemann compatta; fissiamo $a_1, \dots, a_n$ dei punti distinti di X. Allora, per ogni n-unpla di numeri complessi $c_1, \dots, c_n$, esiste una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ tale che $f(a_i) = c_i$ per ogni i.*

Dimostrazione. Per ogni coppia $i \neq j$ possiamo applicare il Teorema precedente ($Y = X$) ottenendo funzioni f_{ij} che siano meromorfe, con un polo in a_i, e olomorfe in a_j. Scegliamo dei numeri complessi λ_{ij} tali che $f_{ij}(a_k) \neq f_{ij}(a_j) - \lambda_{ij}$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Allora la funzione

$$g_{ij} := \frac{f_{ij} - f_{ij}(a_j)}{f_{ij} - f_{ij}(a_j) + \lambda_{ij}}$$

è meromorfa su tutto X, ed olomorfa in ogni a_k. Inoltre $g_{ij}(a_i) = 1$ e $g_{ij}(a_j) = 0$.

Ora, le funzioni $h_i := \prod_{j \neq i} g_{ij}$, per $i = 1, \dots, n$, soddisfano $h_i(a_j) = \delta_{ij}$, e quindi la mappa $\sum_{i=1}^n c_i h_i$ dimostra la tesi. $\square$

9 Il teorema di Riemann-Roch

Definizione 67 (Divisore)**.** Sia X una superficie di Riemann. Un *divisore* è una mappa

$$D \colon X \to \mathbb{Z}$$

tale che, per ogni compatto $K \subseteq X$ c'è soloun numero finito di punti di $p \in K$ tale che $D(p) \neq 0$.

Osserviamo che rispetto all'addizione l'insieme dei divisori su X è un gruppo abeliano, che denotiamo con $\mathrm{Div}(X)$; inoltre su $\mathrm{Div}(X)$ possiamo considerare l'ordine parziale dato da $D \leq D'$ se $D(x) \leq D'(x)$ per ogni $x \in X$.

Supponiamo ora che Y sia un aperto di X; per una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}(Y)$, e $a \in Y$ definiamo:

$$\mathrm{ord}_a(f) := \begin{cases} 0 & \text{se } f \text{ è olomorfa non nulla in } a \\ k & \text{se } f \text{ ha uno zero di ordine } k \text{ in } a \\ -k & \text{se } f \text{ ha un polo di ordine } k \text{ in } a \\ \infty & \text{se } f \text{ è identicamente nulla in un intorno di } a \end{cases}$$

Definizione 68. Per ogni funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}(X) - \{0\}$, la mappa $x \mapsto \mathrm{ord}_x(f)$ è un divisore su X. Sarà chiamato *il divisore di* f e denotato con (f).

Diciamo che la funzione f è un multiplo del divisore D se $(f) \geq D$.

Osservazione 69. La mappa f è olomorfa precisamente se $(f) \geq 0$.

Per una 1-forma meromorfa $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(Y)$ possiamo definire il suo ordine in un punto $a \in Y$ procedendo come segue. Scegliamo un aperto coordinato in a, diciamo (U, z), e, se in tali coordinate la forma si scrive come $\omega = f dz$, con f meromorfa, poniamo

$$\mathrm{ord}_a(\omega) := \mathrm{ord}_a(f).$$

Tale definizione è indipendente dalla scelta di coordinate, dunque la mappa $x \mapsto \mathrm{ord}_a(\omega)$, per $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(Y) \setminus \{0\}$, è un divisore su X, che denotiamo con (ω).

Per $f, g \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ e $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$ si hanno le relazioni:

$$(fg) = (f) + (g), \quad \left(\frac{1}{f}\right) = -(f), \quad (f\omega) = (f) + (\omega).$$

Definizione 70. Un divisore $D \in \operatorname{Div}(X)$ è detto *divisore principale* se esiste una funzione $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ tale che $D = (f)$.

Due divisori $D, D' \in \operatorname{Div}(X)$ sono detti *equivalenti* se la loro differenza $D - D'$ è un divisore principale.

Chiamiamo *divisore canonico* il divisore (ω) di una 1-forma meromorfa $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$.

Osserviamo che ogni coppia di divisori canonici dà divisori equivalenti; infatti, se ω e η sono in $\mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$, esiste una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ tale che $\omega = f\eta$, ovvero $(\omega) = (f) + (\eta)$.

Definizione 71. Supponiamo che X sia una superficie di Riemann compatta. Allora per ogni divisore $D \in \operatorname{Div}(X)$ vi sono solo un numero finito di punti $x \in X$ tali che $D(x) \neq 0$. Definiamo *grado* la mappa

$$\deg\colon \operatorname{Div}(X) \to \mathbb{Z}$$

che ad un divisore D associa il numero $\sum_{x \in X} D(x)$.

La mappa appena definita è un omomorfismo di gruppi, e notiamo che $\deg(D) = 0$ per ogni divisore principale su una superficie di Riemann compatta. Infatti una funzione meromorfa ha tanti zeri quanti poli. Di conseguenza, divisori equivalenti hanno lo stesso grado.

Definiamo ora il fascio dei divisori; sia X una superficie di Riemann, e D un suo divisore. Per ogni aperto U definiamo

$$\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}(U) \mid \operatorname{ord}_x(f) \geq -D(x) \text{ per ogni } x \in U\}$$

ovvero l'insieme di tutte le funzione meromorfe su U che sono multipli del divisore $-D$. Insieme alle usuali mappe di restrizione, $\mathcal{O}_D$ risulta essere un fascio. Osserviamo che, nel caso speciale in cui $D = 0$, $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}$.

Osservazione 72. Se D, D' sono divisori equivalenti su X, allora $\mathcal{O}_D$ è isomorfo a $\mathcal{O}_{D'}$. Sia infatti $\psi \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ tale che $D - D' = (\psi)$. Allora l'omomorfismo di fasci indotto dalla moltiplicazione per ψ, ovvero $f \in \mathcal{O}_D \to \psi f \in \mathcal{O}_{D'}$ è un isomorfismo.

Teorema 73. *Sia X una superficie di Riemann compatta e D un suo divisore, con* $\deg D < 0$. *Allora* $\check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che esiste $f \in \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) = 0$, con $f \neq 0$. Allora $(f) \geq -D$ e quindi $\deg(f) \geq -\deg(D) > 0$. Ciò però contraddice il fatto che $\deg(f) = 0$. $\square$

Definizione 74. Sia P un punto della superficie di Riemann X. Definiamo il fascio grattacielo $\mathbb{C}_P$ su X come

$$\mathbb{C}_P(U) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{se } U \text{ contiene } P \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che si ha $\check{H}^0(X, \mathbb{C}_P) = \mathbb{C}$ in quanto $\check{H}^0(X, \mathbb{C}_P) = \mathbb{C}_P(X)$, mentre $\check{H}^1(X, \mathbb{C}_P) = 0$. Infatti consideriamo una classe in coomologia ξ rappresentata da un cociclo in $Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}_P)$. Il ricoprimento $\mathfrak{U}$ ha un raffinamento $\mathfrak{V}$ tale che P appartenga ad un solo $V_i \in \mathfrak{V}$; ma allora $Z^1(\mathfrak{V}, \mathbb{C}_P) = 0$ e quindi ξ era la classe banale.

Consideriamo ora un arbitrario divisore su X, e per $P \in X$ denotiamo con la stessa lettera P il divisore che su P dà 1, ed è 0 altrimenti. Chiaramente $D \leq D + P$ e vi è una naturale inclusione $\mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D+P}$. Sia (V, z) una carta centrata in P, e definiamo un omomorfismo di fasci

$$\beta\colon \mathcal{O}_{D+P} \to \mathbb{C}_P$$

definito come segue. Sia U un aperto di X; se U non contiene P, β_U è la mappa nulla, altrimenti, per $f \in \mathcal{O}_{D+P}(U)$ consideriamo la sua serie di Laurent in un intorno di P per mezzo della carta (V, z):

$$f = \sum_{n=-k-1}^{\infty} c_n z^n$$

dove si è posto $k = D(P)$ e quindi lo sviluppo parte da $-k-1$. Poniamo allora

$$\beta_U(f) = c_{-k-1} \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}_P(U)$$

. Si vede facilmente che β è un omomorfismo di fasci, e che dalla costruzione data, tale omomorfismo è surgettivo. Inoltre la successione

$$0 \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D+P} \to \mathbb{C}_P \to 0$$

è esatta, e induce perciò una successione esatta lunga

$$0 \to \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to \mathbb{C} \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to 0.$$

Corollario 75. *Siano D, D' due divisori su una superficie di Riemann compatta X, con $D \leq D'$. Allora la mappa di inclusione $\mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D'}$ induce un omomorfismo surgettivo:*

$$\check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to 0.$$

Dimostrazione. Se $D' = D + P$ la tesi segue dalla successione esatta lunga appena trovata; in generale basta procedere per induzione, in quanto $D' = D + P_1 + \cdots + P_k$. □

Teorema 76 (di Riemann-Roch)**.** *Sia D un divisore su una superficie di Riemann compatta X di genere g. Allora $\check{H}^0(X, \mathcal{O}_D)$ e $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_D)$ sono spazi vettoriali di dimensione finita, e verificano l'uguaglianza:*

$$\dim \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim \check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D.$$

Dimostrazione. Partiamo dal caso in cui il divisore D è il divisore nullo; in tal caso $\check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) = \mathcal{O}(X)$ e consiste di tutte le funzioni olomorfe su X, ovvero costanti. Dunque la sua dimensione è 1. Per definizione di genere invece, $g = \dim \check{H}^1(X, \mathcal{O})$, e ciò prova l'uguaglianza in quanto il divisore nullo ha grado 0.

Sia ora D un divisore arbitrario, P un punto di X e $D' = D + P$. Supponiamo prima che il Teorema sia vero per uno tra D e D'. La successione esatta lunga

$$0 \to \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to \mathbb{C} \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to 0.$$

si può dividere in due successioni esatte corte. Poniamo infatti $V := \mathrm{Im}(\check{H}^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to \mathbb{C})$ e $W := \mathbb{C}/V$. Allora $\dim V + \dim W = 1 = \deg(D+P) - \deg(D)$ e le successioni

$$0 \to \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to V \to 0$$

$$0 \to W \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to 0$$

sono esatte. Ma allora tutti questi spazi hanno dimensione finita, e si hanno le relazioni:

$$\dim \check{H}^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = \dim \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim V$$

$$\dim \check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + \dim W$$

Mettendo il tutto insieme, si ha allora

$$\dim \check{H}^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D'}) - \deg D' = \dim \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim \check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) - \deg D$$

e, se ancora la formula di Riemann-Roch vale per uno tra D e D', la stessa vale anche per l'altro. Ciò dimostra anche che il Teorema è vero per ogni divisore $D' \geq 0$ in quento abbiamo già mostrato che la formula è vera per $D = 0$.

Infine, un divisore arbitrario D su X si può scrivere come

$$D = P_1 + \cdots + P_m - P_{m+1} - \cdots - P_n$$

e dunque, procedendo per induzione, iniziando dal divisore nullo, e usando il risultato appena provato, si ha la tesi per D. □

Teorema 77. *Sia X una superficie di Riemann compatta X di genere g, e $a \in X$. Allora esiste una funzione meromorfa non costante f su X che ha un polo di ordine $ord_a f \leq g + 1$ ed è olomorfa su $X \setminus \{a\}$.*

Dimostrazione. Sia $D \colon X \to \mathbb{Z}$ il divisore definito da $D(a) = g + 1$ e $D(x) = 0$ per $x \neq a$. Per il Teorema di Riemann-Roch

$$\dim \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + \deg D = 2;$$

allora esiste una una funzione non costante $f \in \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D)$, come richiesto. □

Corollario 78. *Sia X una superficie di Riemann compatta di genere g. Allora esiste una mappa olomorfa $f \colon X \to \mathbb{P}^1$ che è un rivestimento ad al massimo $g + 1$ fogli.*

Dimostrazione. La funzione f trovata nel Teorema precedente è una funzione olomorfa non costante da X in P^1, quindi, per quanto già visto, f è una mappa di rivestimento. Infine il valore ∞ è assunto con molteplicità al più $g + 1$, dunque la tesi. □

Corollario 79. *Ogni superficie di Riemann di genere 0 è olomorfa a $\mathbb{P}^1$.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che un rivestimento ad un foglio è un biolomorfismo. □